ALGEBRA

Polynomdivision

Themenheft

Mit vielen Übungen

Im Text 12116 wird die Polynomdivision in Form einer Schulstunde eingeführt.

Das Themenheft ist deutlich umfangreicher und enthält zusätzliche Aufgaben.

Stand: 9. Januar 2025

Datei Nr. 12117

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

https://mathe-cd.de

Die Normalform von Bruchsummen

Die folgenden Summen von Bruchtermen bringt man durch Addition auf einen Hauptnenner, also in eine Form, die man auch **Normalform** nennt:

a) $$\underbrace{x^2-5x+3-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}_{\text{aufgespaltene Form}}=\underbrace{\frac{x^4-5x^3+3x^2-5x+7}{x^2}}_{\text{Normalform}}$$

b) $$\underbrace{2x+1-\frac{5}{x-3}}_{\text{aufgespaltene Form}}=\frac{(2x+1)\cdot(x-3)-5}{x-3}=\underbrace{\frac{2x^2-5x-8}{x-3}}_{\text{Normalform}}$$

Der Weg von links nach rechts ist leicht. Man muss eben so erweitern, dass alle Brüche denselben Nenner erhalten. Weitere Beispiele:

c) $$2-\frac{3}{x}=\frac{2x-3}{x}$$

d) $$x+1+\frac{4}{x}=\frac{(x+1)\cdot x+4}{x}=\frac{x^2+x+4}{x}$$

e) $$x-1+\frac{4}{x^2}=\frac{(x-1)\cdot x^2+4}{x^2}=\frac{x^3-x^2+4}{x^2}$$

f) $$\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{x^2}=\frac{x^2}{2}+\frac{2}{x^2}=\frac{x^4+4}{2\cdot x^2}$$

g) $$\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-\frac{4}{x}=\frac{x}{4}+\frac{1}{2}-\frac{4}{x}=\frac{x^2+2x-16}{4x}$$

h) $$2-\frac{3}{x+1}=\frac{2(x+1)-3}{x+1}=\frac{2x-1}{x+1}$$

i) $$-1+\frac{18}{x^2+9}=\frac{-(x^2+9)+18}{x^2+9}=\frac{-x^2+9}{x^2+9}$$

k) $$x+\frac{4}{x+2}=\frac{x(x+2)+4}{x+2}=\frac{x^2+2x+4}{x+2}$$

l) $$x+1-\frac{2}{(x-1)^2}=\frac{(x+1)(x-1)^2-2}{(x-1)^2}=\frac{(x+1)(x^2-2x+1)-2}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{x^3-2x^2+x+x^2-2x+1-2}{(x-1)^2}=\frac{x^3-x^2-x-1}{(x-1)^2}$$

Aufgabe 1

Bringe in die Normalform:

(a) $4-\frac{3}{x}$ (b) $\frac{1}{3}x+\frac{2}{x}$ (c) $x+2-\frac{4}{x}$ (d) $\frac{1}{4}x-\frac{4}{x^2}$ (e) $\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{x}$

(f) $4x-1+\frac{3}{x^2-1}$ (g) $\frac{1}{2}x-3+\frac{x-1}{x^2+4}$ (h) $2x-\frac{5}{x+2}$ (i) $x+5+\frac{3x}{x^2-9}$

Für viele Zwecke (vor allem in der Oberstufe) muss man umgekehrt einen Bruch in der Normalform in Summe einzelner Brüche aufspalten können!

Dies geht sehr einfach, wenn der Nenner des Bruchterms keine Summe enthält.
Es wird aber kompliziert und erfordert ein neues Rechenverfahren, wenn im Nenner eine Summe steht. (Man nennt eine Differenz auch eine Summe: $5-3=5+(-3)$)

Grundaufgabe

Termumformungen von der Normalform in die aufgespaltete Form.

1. Fall: Der Nenner enthält keine Summe

Beispiele:

a) $\frac{2x+4}{x}=\frac{2x}{x}+\frac{4}{x}=2+\frac{4}{x}$

b) $\frac{x+8}{4x}=\frac{x}{4x}+\frac{8}{4x}=\frac{1}{4}+\frac{2}{x}$

c) $\frac{x^2-9}{x}=\frac{x^2}{x}-\frac{9}{x}=x-\frac{9}{x}$

d) $\frac{x^2+4}{2x}=\frac{x^2}{2x}+\frac{4}{2x}=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=\frac{1}{2}x+\frac{2}{x}$

e) $\frac{x^3-8}{4x}=\frac{x^3}{4x}-\frac{8}{4x}=\frac{x^2}{4}-\frac{2}{x}=\frac{1}{4}x^2-\frac{2}{x}$

f) $\frac{x^3+x^2-4}{x^2}=\frac{x^3}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}=x+1-\frac{4}{x^2}$

g) $\frac{x^4-4}{8x^2}=\frac{x^4}{8x^2}-\frac{4}{8x^2}=\frac{x^2}{8}-\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2x^2}$

Die Methode ist ganz klar: Man zerlegt den Bruch in so viele einzelne Brüche, wie der Zähler Summanden hat. Dann wird jeder dieser Einzelbrüche so weit wie möglich gekürzt.

Man nennt die höchste vorkommende Hochzahl (Exponent) den Grad des Zählers bzw. Nenners. Wie man in den Beispielen erkennt, hängt das Ergebnis Vom Grad des Zählers bzw. Nenners ab:

1. Fall: Haben Zähler und Nenner den gleichen Grad (Beispiele a und b sowie Aufgabe 3a und 3c), dann bleibt vor dem Bruch eine Zahl (ggf. Bruchzahl) stehen.

2. Fall: Ist der Grad des Zählers dagegen größer als der des Nenners, dann bleibt nach der Zerlegung vor dem Bruch sogar noch x oder x^2 usw. stehen.

Aufgabe 2

Zerlege so weit wie möglich in Einzelbrüche.

(a) $\frac{x+4}{8x}$ (b) $\frac{3x-4}{2x^2}$ (c) $\frac{4x+6}{3x}$ (d) $\frac{x^3-12x^2+4}{4x^2}$ (e) $\frac{x^4-64}{4x^2}$

Die Zerlegung eines Bruches in Einzelbrüche ist eine Division.

$$\frac{4x^2+3x-2}{x}=\frac{4x^2}{x}+\frac{3x}{x}-\frac{2}{x}=4x+3-\frac{2}{x}$$

In den beiden ersten Teilbrüchen kann man durch x kürzen, und dies bedeutet doch, dass der Zähler jeweils durch x dividiert wird. Dies geht mit der letzten Zahl -2 nicht. Sie stellt sozusagen den Divisionsrest dar, deshalb bleibt x im Nenner stehen.

a) Zahlenbeispiel:

$$\begin{array}{l} 741:6=123\ \text{Rest}\ 3 \\ \underline{-6} \\ \ \ 14 \\ \underline{-12} \\ \ \ \ 21 \\ \ \underline{-18} \\ \ \ \ \ 3 \end{array}$$

Also gilt: $\frac{741}{6}=123+\frac{3}{6}$

b) Termbeispiel:

$$\begin{array}{l} (4x^2+3x-2):x=4x+3\ \text{Rest}\ -2 \\ \underline{-4x^2} \\ \ \ 0\ +3x \\ \ \ \ \ \underline{-3x} \\ \ \ \ \ \ \ 0-2 \end{array}$$

und $\frac{4x^2+3x-2}{x}=4x+3-\frac{2}{x}$

Der Rest wird jeweils noch durch den Nenner geteilt.

c) $\frac{x^3-8}{4x}=\frac{x^3}{4x}-\frac{8}{4x}=\frac{x^2}{4}-\frac{2}{x}=\frac{1}{4}x^2-\frac{2}{x}$

Jetzt als Division:

$$\begin{array}{l} (x^3-8):(4x)=\tfrac{1}{4}x^2\ \text{Rest}\ -8 \\ \underline{-x^3} \\ \ \ 0\ -8 \end{array}$$

Also gilt: $\frac{x^3-8}{4x}=\frac{1}{4}x^2-\frac{8}{4x}=\frac{1}{4}x^2-\frac{2}{x}$

d)

$$\begin{array}{l} (2x^4-5x^3+x^2-x+8):(2x^2)=x^2-\tfrac{5}{2}x+\tfrac{1}{2}\ \text{Rest}\ (-x+8) \\ \underline{-2x^4} \\ \ \ 0\ -5x^3 \\ \ \ \ \ \underline{-5x^3} \\ \ \ \ \ \ \ 0\ +x^2 \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \underline{+x^2} \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 0\ -x+8 \end{array}$$

Also folgt: $\frac{2x^4-5x^3+x^2-x+8}{2x^2}=x^2-\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}+\frac{-x+8}{2x^2}$

2. Fall: Der Nenner enthält eine Summe

Um einen Bruch zu zerlegen, der im Nenner eine Summe enthält, muss man mit Polynomdivision arbeiten!

Im Originaltext werden diese Brüche mit Polynomdivision umgeformt

(1) $\frac{x-2}{x+1}=?$ (2) $\frac{x^2-9}{x-2}=?$ (3) $\frac{x^3-x+1}{x-1}=?$

(4) $\frac{x^3+2x^2+2}{x^2+1}=?$ (5) $\frac{x^2-3x+1}{x+5}=?$ (6) $\frac{x^2-3x+1}{x-3}=?$

(7) $\frac{x^2-3x+1}{x^2-3}=?$ (8) $\frac{x^2-3x+1}{x^3+1}=?$ (9) $\frac{4x^3}{x^2-5}=?$

(10) $\frac{x^4+2}{x^2+4x+4}=?$ (11) $\frac{-6x^6+14x^5-8x^4-2x^3+8x-6}{x^2-2x+1}=?$

(12) $\frac{2x^5-4x^4+x^3-2x^2-x-6}{x^3-3x^2+3x-1}=?$ (13) $\frac{x^4+3x^2+6}{x^2+2}=?$

Aufgabe 3 Zerlege durch Polynomdivision:

(a) $\frac{4x+1}{x+2}$ (b) $\frac{2x^2+x}{2x-1}$ (c) $\frac{x^2-1}{x^2+4}$ (d) $\frac{x^3+4x+4}{x^2+4}$

(e) $\frac{x^3+6x}{2x^2+8}$ (f) $\frac{x^3+4x^2-3x+1}{x-4}$ (g) $\frac{x^3-8}{x+2}$ (h) $\frac{x^3-8}{x-2}$

(i) $\frac{4x^3}{x^2-5}$ (j) $\frac{x^2-5x+1}{2x+3}$ (k) $\frac{3x^2-6}{2x-1}$ (l) $\frac{x^4+2}{(x+2)^2}$

Die Lösungen stehen im Originaltext.